Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2023
Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El examen está compuesto de tres secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 4x + 5y - 3$ sujeta a las siguientes restricciones:

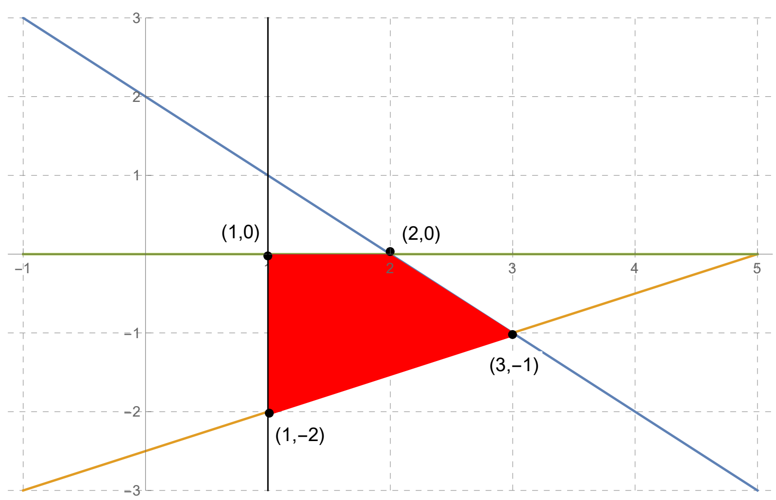
$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - 2y \leq 5 \\ y \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

Solución:

a) Los vértices de la región factible son $A = (1, -2)$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 0)$, y $D = (3, -1)$. (0.25 puntos por determinar los vértices y 0.25 por cada inecuación bien representada)



b) Aplicados a la función objetivo $f(A) = -9$; $f(B) = 1$; $f(C) = 5$; $f(D) = 4$. Luego el máximo está en el punto $(2, 0)$ con 5 unidades y el mínimo en $(1, -2)$ con -9 unidades. (0.25 puntos)

2. En una galería de arte disponen de cuadros de tres artistas: uno realiza arte urbano, otro se dedica al arte abstracto y el tercero al grafiti. El $40\,\%$ de la suma de los cuadros pintados por el primero y el segundo es 28. El doble de los cuadros del que realiza arte abstracto equivale al triple de los cuadros del que hace grafiti. En total, en la galería disponen de 110 cuadros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para determinar cuántos cuadros tiene cada artista en la galería. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Solución:

a) Tomando $x \equiv$ nº de cuadros de arte urbano; $y \equiv$ nº de cuadros de arte abstracto; $z \equiv$ nº de cuadros de graffiti.

$$\begin{cases} 0.4(x + y) = 28 \\ 2y = 3z \\ x + y + z = 110 \end{cases}$$ (0.25 puntos por cada ecuación bien planteada).

b) La solución del sistema es $(x, y, z) = (10, 60, 40)$ cuadros. El que realiza arte urbano tiene 10 cuadros, el de arte abstracto 60 y el de graffiti 40. (0.5 puntos por el desarrollo de la resolución y 0.25 puntos por la solución correcta)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x+1|+t & \text{si } x \leq 0 \\ -x^3+2x^2+(t+2)x+3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.5 puntos)

b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \infty)$. (0.5 puntos)

c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, \infty)$. (0.5 puntos)

Solución:

a) La función es continua en $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Para que exista el límite, los límites laterales tienen que ser iguales:

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(|x+1|+t) = t+1 = f(0)$.

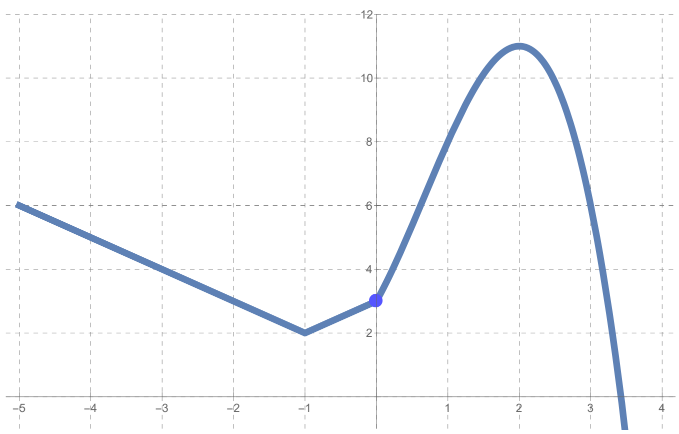
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(-x^3+2x^2+(t+2)x+3) = 3$.

$t+1 = 3 \Rightarrow t = 2$. (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.25 puntos)

b) Los extremos relativos verifican $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -3x^2+4x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ y $x = 2$.

$f''(x) = -6x+4 \Rightarrow f''(2) = -8 < 0 \Rightarrow$ máximo relativo en $(2, 11)$ ($x = -\frac{2}{3} \notin (0, \infty)$). (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.25 puntos)

c) $f'(x) > 0$ en el intervalo $(0, 2)$ por lo que la función crece y $f'(x) < 0$ en el intervalo $(2, \infty)$ donde decrece. (0.25 por cada intervalo correcto)



2. Halla razonadamente los parámetros a y b de la función $f(x) = ax^2 + bx - 20$, sabiendo que dicha función tiene un máximo en el punto $(6, 16)$. (1.5 puntos)

Solución:

$$f(x) = ax^2 + bx - 20 \Rightarrow f'(x) = 2ax + b.$$

$$\begin{cases} f(6) = 16 \\ f'(6) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36a + 6b - 20 = 16 \\ 12a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1,\ b = 12 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 12x - 20.$$

(0.5 por cada condición. 0.5 por la solución correcta)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. Un estudio sobre ingredientes de pizza indica que solo al $30\,\%$ de la población le gusta la piña en la pizza y de estos, a un $60\,\%$ le gustan las anchoas. Sin embargo, de los que no les gusta la piña, el $75\,\%$ afirman que no les gustan las anchoas en la pizza.

a) Elegido un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le gusten las anchoas en la pizza? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que a una persona no le gustan las anchoas en la pizza, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la piña? (0.75 puntos)

Solución:

$p =$ Piña; $A =$ Anchoas; $p^c =$ No piña; $A^c =$ No anchoas.

$P(p) = 0.3$; $P(p^c) = 0.7$; $P(A \mid p) = 0.6$; $P(A^c \mid p) = 0.4$; $P(A \mid p^c) = 0.25$; $P(A^c \mid p^c) = 0.75$.

a) $P(A) = P(p) \cdot P(A \mid p) + P(p^c) \cdot P(A \mid p^c) = 0.3 \cdot 0.6 + 0.7 \cdot 0.25 = 0.355$. (0.75 puntos)

b) $P(p \mid A^c) = \frac{P(p \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(p) \cdot P(A^c|p)}{P(A^c)} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{1-0.355} = \frac{0.12}{0.645} = 0.186$. (0.75 puntos)

4. Una marca de productos de repostería ha tomado una muestra aleatoria de 36 bizcochos y ha medido su contenido calórico, proporcionando una media de 223 calorías. Si se sabe que el contenido calórico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 51$ calorías,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del contenido calórico de los bizcochos con un nivel de confianza del $95\,\%$. (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del $94.64\,\%$, el error máximo admisible sea menor que 10 calorías. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

a) Del enunciado se deduce: $\bar{X} = 223$ calorías, $\sigma = 51$ calorías, $n = 36$, $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ (0.25 puntos)

IC $= \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. (0.25 puntos)

IC $= \left(223 - 1.96 \frac{51}{\sqrt{36}},\ 223 + 1.96 \frac{51}{\sqrt{36}}\right) = (206.34,\ 239.66)$. (0.5 puntos)

b) El error máximo admisible viene dado por $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{E}\right)^2$ (0.25 puntos)

$1 - \alpha = 0.9464 \Rightarrow \alpha = 0.0536 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0268 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.93$. (0.25 puntos)

Para $E = 10 \Rightarrow n = \left(\frac{1.93 \cdot 51}{10}\right)^2 = (9.843)^2 = 96.885$. El tamaño mínimo de la muestra para que el error de estimación de la media sea inferior a 10 calorías, con un nivel de confianza del $94.64\,\%$ debe ser 97 bizcochos. (0.5 puntos)

Bloque 2

3. Una cooperativa manchega que distribuye tres tipos de vino, blanco, rosado y tinto, ha recibido un pedido de 50 botellas. Se sabe que el doble de botellas de vino blanco, por una parte, excede en una unidad al de botellas de vino rosado y, por otra parte, coincide con el quíntuplo del número de botellas vino tinto.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas botellas de vino blanco, rosado y tinto se pidieron. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Solución:

a) Tomando $x \equiv$ nº de botellas de vino blanco; $y \equiv$ nº de botellas de vino rosado; $z \equiv$ nº de botellas de vino tinto.

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x = 5z \\ 2x = y + 1 \\ x + y + z = 50 \end{array} \right.$$ (0.25 puntos por cada ecuación bien planteada).

b) La solución del sistema es $(x, y, z) = (15, 29, 6)$ botellas. Se pidieron 15 botellas de vino blanco, 29 de rosado y 6 de tinto. (0.5 puntos por el desarrollo de la resolución y 0.25 puntos por la solución correcta)

4. a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ demuestra que M y N conmutan. (0.5 puntos)

b) Resuelve la ecuación $M \cdot P \cdot X = N^T - M$. (1 punto)

c) Calcula la matriz que sumada con la matriz $(N+I)^2$ da como resultado la matriz nula, siendo I la matriz identidad de orden 2. (0.5 puntos)

Solución:

a) $M \cdot N = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $N \cdot M = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego se demuestra que las matrices conmutan y al ser el resultado la matriz identidad son inversas entre sí. (0.5 puntos)

b) $M \cdot P \cdot X = N^T - M \Rightarrow X = (M \cdot P)^{-1} \cdot (N^T - M)$.

$$X = \left[\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} -1/3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -10/3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$. (0.5 puntos la matriz inversa. Todo correcto 1 punto)

c) La matriz a calcular ha de ser cuadrada de orden 2.

$(N+I)^2 + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^2 +$
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 & -36 \\ -4 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 36 \\ 4 & -18 \end{pmatrix}$. (0.5 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En una empresa de reparto el $9\,\%$ de los paquetes llega con retraso, el $14\,\%$ llega defectuoso y $19\,\%$ llega con retraso o defectuoso o ambos.

a) Elegido un paquete al azar, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso y con retraso? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que un paquete llega con retraso, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso? (0.75 puntos)

Solución:

$R =$ retraso; $D =$ Defectuoso; $P(R) = 0.09$; $P(D) = 0.14$; $P(R \cup D) = 0.19$.

a) $P(D \cap R) = P(D) + P(R) - P(R \cup D) = 0.09 + 0.14 - 0.19 = 0.04$. (0.75 puntos)

b) $P(D \mid R) = \frac{P(D \cap R)}{P(R)} = \frac{0.04}{0.09} = 0.444$. (0.75 puntos)

6. La distancia alcanzada en el lanzamiento de jabalina por los integrantes de un equipo de atletismo infantil sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 81$ metros^2. Se ha tomado una muestra de 9 atletas del equipo y las distancias alcanzadas han sido 16, 21, 15, 17, 16, 19, 14, 14 y 19 metros.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la distancia de lanzamiento de jabalina con un nivel de confianza del $97\,\%$. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 49 atletas y un nivel de confianza del $95.96\,\%$? (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:

a) La media muestral es: $\bar{X} = \frac{16+21+15+17+16+19+14+14+19}{9} = 16.778$ metros.
   Del enunciado se deduce: $\sigma^2 = 81$ metros^2 $\Rightarrow \sigma = 9$ metros, $n = 9$, $1-\alpha = 0.97 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$. (0.25 puntos)
   IC $= \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (0.25 puntos)
   IC $= \left(16.778 - 2.17\frac{9}{\sqrt{9}}, \ 16.778 + 2.17\frac{9}{\sqrt{9}}\right) = (10.268, \ 23.288)$. (0.5 puntos)
b) Para aumentar la amplitud del intervalo manteniendo el nivel de confianza, hay que aumentar el valor de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y como σ es un valor dado, la única opción es disminuir el tamaño de muestra. (0.25 puntos por la respuesta correcta y 0.25 puntos por la justificación)
c) $1-\alpha = 0.9596 \Rightarrow \alpha = 0.0404 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0202 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.05$. (0.25 puntos)
   Error máximo admisible $E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.05\frac{9}{\sqrt{49}} = 2.6357$. (0.25 puntos)

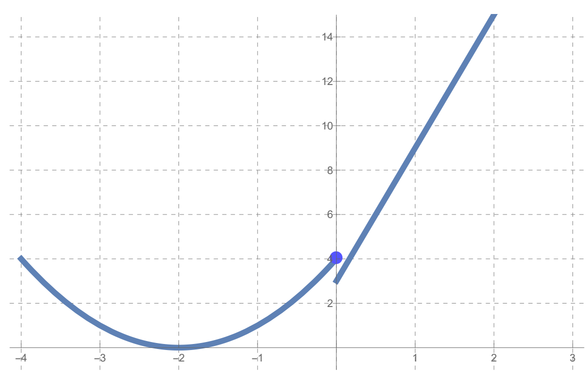
Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x \leq c \\ 6x+3 & \text{si } x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0.75 puntos)
b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c = 0$. (0.75 puntos)

Solución:

a) La función es continua en $x = c \Leftrightarrow \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Para que exista el límite, los límites laterales tienen que ser iguales:
   $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c}(x+2)^2 = (c+2)^2 = c^2+4c+4 = f(c)$.
   $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c}(6x+3) = 6c+3$.
   $c^2+4c+4 = 6c+3 \Rightarrow c^2-2c+1 = 0 \Rightarrow c = 1$. (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.5 puntos)
b) (0.25 puntos por cada trozo bien dibujado. Todo correcto 0.75 puntos)



6. El consumo de agua, en dm^3, de una urbanización durante 6 horas viene reflejado por la función $C(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$ siendo $x =$ el tiempo medido en horas y $0 \leq x \leq 6$.

a) ¿En qué momentos se produjo el mayor consumo y a cuánto ascendió? (1.25 puntos)
b) ¿En qué intervalo de tiempo disminuyó el consumo de agua? (0.75 puntos)

Solución:

a) Máximo relativo si $C'(x) = 0$ y $C''(x) < 0$. $C'(x) = 3x^2 - 24x + 45 = 0 \Rightarrow x = 3$ y $x = 5$.
   $C''(x) = 6x - 24 \Rightarrow C''(3) = -6 < 0$ y $C''(5) = 6 > 0$. Se tiene que $C(3) = 54$ dm^3.
   Se evalúan los extremos y se tiene que $C(0) = 0$ y $C(6) = 54$.
   Los consumos máximos se alcanzaron a la tercera y sexta hora siendo de 54 dm^3. (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto del máximo 0.5 puntos y valores máximos 0.5 puntos)
b) $C^{'}(x) < 0$ en el intervalo $(3, 5)$ por lo que la función decrece en ese intervalo. (0.75 puntos)