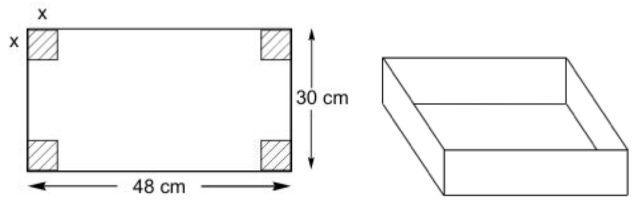
Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2024/2025

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los **ejercicios 2, 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). **Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos.** Duración de la prueba: 90 minutos.

EJERCICIO 1. Para guardar el material escolar, se quiere construir una caja (sin tapa) a partir de una plancha de cartón de 48 cm de largo por 30 cm de ancho, a la que se le ha recortado un cuadrado de lado x en cada una de sus esquinas (véase el dibujo).



a) **[0,75 puntos]** Determina el volumen de la caja.

b) **[1 punto]** Determina las dimensiones de la caja si se quiere que contenga el mayor volumen posible.

c) **[0,75 puntos]** Para poder trasportar la caja cómodamente, se van a realizar dos aberturas. El área de cada una de ellas está encerrada por las curvas $f(t) = t^2 - 4t$ y $g(t) = 2t - 5$. Calcula el área de una de las aberturas.

Solución:

a) El volumen de la caja es el área de la base por la altura. El área de la base es $(48 - 2x) \cdot (30 - 2x)$ y la altura de la caja es x. Por tanto, el volumen de la caja se puede escribir como la siguiente función: $V(x) = (48 - 2x) \cdot (30 - 2x) \cdot x$, con $x \in (0, 15)$, para que el volumen sea siempre positivo, nunca negativo.

Criterios de corrección:

- Determinar el área de la base, 0,25 puntos; determinar la altura de la caja, 0,25 puntos; determinar la función del volumen en función de x, 0,25 puntos.

b) Para determinar las dimensiones de la caja de volumen máximo podemos trabajar con $V(x)$ y buscar el valor de x que maximiza su valor. Para ello, lo que haremos será tomar la derivada del volumen, $V'(x) = 12x^2 - 312x + 1440$, e igualarla a cero. En este caso, la derivada es cero si y solo si $x = 6$ o $x = 20$. Por tanto, la única solución posible es $x = 6$.

La derivada segunda del volumen es $V''(x) = 24x - 312$. Como $V''(6) = 144 - 312 = -168 < 0$, tenemos que para $x = 6$ el volumen es máximo.

Criterios de corrección:

- Obtener la primera derivada de $V(x)$, 0,25 puntos; determinar los puntos en los que se anula, 0,25 puntos; determinar y justificar el máximo, 0,5 puntos.

c) En primer lugar, determinamos los puntos de corte de las dos funciones, para lo que resolvemos $f(t) = g(t)$ o, también, $f(t) - g(t) = 0$. Por tanto, $t^2 - 4t - (2t - 5) = t^2 - 6t + 5 = 0$. Los valores de t que cumplen esa ecuación son $t = 1$ y $t = 5$.

Por tanto, el área que se pide es

$$\acute{A}rea = \left|\int_1^5 (t^2 - 6t + 5)dt\right| = \left|\left[\frac{t^3}{3} - 3t^2 + 5t\right]_1^5\right| = \left|-\frac{32}{3}\right| = \frac{32}{3}\ unidades^2$$

Criterios de corrección:

- Obtener los puntos de corte, 0,25 puntos; calcular la integral indefinida, 0,25 puntos; obtener el valor del área, 0,25 puntos.

EJERCICIO 2. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Para las fiestas del Corpus Christi que se celebran en Toledo, se instalan toldos en las calles por las que transcurre la procesión. En una de ellas, los operarios colocan los siguientes puntos de apoyo: $A(0,1,-2)$, $B(1,2,0)$, $C(0,0,1)$ y $D(1,0,m)$, con $m \in \mathbb{R}$.

a.1) **[1 punto]** Calcula el valor de m para que los cuatro puntos sean coplanarios.

a.2) **[0,75 puntos]** Determina la ecuación del plano π que contiene al toldo.

a.3) **[0,75 puntos**] Si los adornos florales deben estar como mínimo a 1 metro de distancia del toldo y se ha colocado un adorno de flores en el punto $P(1,2,3)$, ¿estará correctamente ubicado?

Solución:

a.1) Para que los tres puntos sean coplanarios, tiene que ocurrir que el producto mixto de los tres vectores $\overrightarrow{AB} = (1,1,2)$, $\overrightarrow{AC} = (0,-1,3)$ y $\overrightarrow{AD} = (1,-1,m+2)$ sea cero. El producto mixto es $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & m+2 \end{vmatrix} = -m + 6$, que toma el valor cero si y solo si $m = 6$.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,25 puntos; calcular el producto mixto, 0,5 puntos; obtener el valor correcto de m, 0,25 puntos.

a.2) Para obtener el plano tomamos el punto $C(0,0,1)$ y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ (por ejemplo). Así, la ecuación del plano es

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow 5x - 3y - z + 1 = 0$$

Criterios de corrección:

- Determinar los elementos que definen el plano (punto y vectores directores), 0,25 puntos; ecuación del plano (en cualquiera de sus formas), 0,5 puntos.

a.3) La distancia del punto P al plano π viene dada por

$$d(P,\pi) = \frac{|5\cdot 1 - 3\cdot 2 - 1\cdot 3 + 1|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{35}} = \frac{3\sqrt{35}}{35} \simeq 0{,}51 \text{ m}$$

Como la distancia es menor que 1, el adorno de flores está demasiado cerca del toldo.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema y escribir la fórmula de la distancia de un punto a un plano, 0,25 puntos; obtener la distancia, 0,25 puntos; indicar que el adorno no está bien colocado, 0,25 puntos.

Apartado b) Resuelve los problemas siguientes:

b.1) **[1 punto]** Calcula la ecuación del plano π' que pasa por $C(1,1,-2)$, es paralelo a la recta r que pasa por los puntos $A(1,0,3)$ y $B(0,4,-1)$ y perpendicular al plano $\pi \equiv -x + y + 2z = 1$.

b.2) **[1,5 puntos]** Determina los valores reales de $m \in \mathbb{R}$, para que los puntos $A(-1,2,3)$, $B(-1,0,-1)$, $C(2,-1,1)$ y $D(2,3\,,m)$, formen un tetraedro de volumen 8 unidades cúbicas.

Solución:

b.1) El plano viene dado por el punto $C(1{,}1,-2)$, el vector $\overrightarrow{AB} = (-1,4,-4)$ y el vector $\vec{n} = (-1,1,2)$. Por tanto, la ecuación del plano es

$(x,y,z) = (1,1,-2) + \lambda(-1,4,-4) + \gamma(-1{,}1{,}2)$, con $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$

También podemos usar la ecuación implícita $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ -1 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12x + 6y + 3z - 12 = 0$. Si simplificamos, la ecuación del plano quedaría así: $4x + 2y + z - 4 = 0$.

<u>Criterios de corrección:</u>

- Determinar los elementos que definen el plano (punto y vectores directores), 0,5 puntos; ecuación del plano (en cualquiera de sus formas), 0,5 puntos.

b.2) Si tomamos los vectores $\overrightarrow{AB} = (0,-2,-4)$, $\overrightarrow{AC} = (3,-3,-2)$ y $\overrightarrow{AD} = (3{,}1, m-3)$, el volumen del tetraedro viene dado por

$$V = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & m-3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |-36 + 6(m-3)| = 8 \leftrightarrow |-36 + 6(m-3)| = 48$$

Tenemos dos opciones:

- $-36 + 6(m-3) = 48$, por lo que $m = 17$.
- $-\big(-36 + 6(m-3)\big) = 48$, por lo que $m = 1$.

Por tanto, para $m = 1$ o $m = 17$ el tetraedro tendrá un volumen de 8 unidades cúbicas.

<u>Criterios de corrección:</u>

- Plantear el problema y escribir la fórmula del volumen del tetraedro, 0,25 puntos; obtener los vectores para el cálculo del área, 0,75 puntos; obtener los valores correctos de m, 0,5 puntos.

EJERCICIO 3. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales. $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$.

a.1) **[1,5 puntos]** Discute la resolución del sistema según los valores que pueda tomar el parámetro $a \in \mathbb{R}$ e indica el número de soluciones en cada caso.

a.2) [**1 punto]** Para $a = 0$, resuelve el sistema de ecuaciones, de forma razonada.

Solución:

a.1) Sea M la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada. Tenemos que $|M| = 2a - 6$, que se anula cuando $a = 3$. Por tanto, para $a \neq 3$ el sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

Para el caso $a = 3$, tenemos que el rango de M es 2 y el de M' es 2. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

<u>Criterios de corrección:</u>

- Cálculo del determinante de M y de los valores de a en los que se anula, 0,5 puntos; discusión razonada para $a \neq 3$, 0,25 puntos; cálculo del rango de M y M^* cuando $a = 3$, 0,5 puntos;

discusión razonada de este caso, 0,25 puntos. Si se equivoca al calcular el determinante, no tenerlo en cuenta y valorar el resto.

a.2) Para $a = 0$ el sistema es compatible determinado y tiene una única solución. Además, la solución es $(x, y, z) = (-1, 2, -1)$.

Criterios de corrección:

- Plantear el método de resolución, 0,75 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

Apartado b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

b.1) **[1,25 puntos**] Calcula los valores del parámetro a para que $A \cdot B$ sea invertible. Justifica tu respuesta.

b.2) **[1,25 puntos]** Calcula la inversa de $A \cdot B$ en función de a.

Solución:

b.1) Tenemos que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 3+2a \\ 1-a & 1 \end{pmatrix}$, que es una matriz 2×2. Para que sea invertible su determinante tiene que ser distinto de cero. Así,

$$|A \cdot B| = 1 + 2a - (3 + 2a) \cdot (1 - a) = 1 + 2a - 3 + 3a - 2a + 2a^2 = 2a^2 + 3a - 2$$

Este determinante es cero cuando $a = 1/2$ o $a = -2$. Por tanto, la matriz es invertible siempre y cuando a no sea $\frac{1}{2}$ o -2.

Criterios de corrección:

- Justificar cuándo la matriz es invertible, 0,25 puntos; obtener el determinante de $A \cdot B$, 0,5 puntos; encontrar los valores para los que el determinante se anula, 0,5 puntos.

b.2) La inversa de $A \cdot B$ es

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & -3-2a \\ -1+a & 1+2a \end{pmatrix} = \frac{1}{2a^2 + 3a - 2} \begin{pmatrix} 1 & -3-2a \\ -1+a & 1+2a \end{pmatrix}$$

Criterios de corrección:

- Escribir la forma de la matriz inversa, 0,25 puntos; obtener la matriz adjunta, 0.5 puntos; obtener la inversa, 0,5 puntos.

EJERCICIO 4. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En la entrada del instituto hay tres fotocopiadoras A, B y C cuyos porcentajes de fallos son 3%, 5% y 4%, respectivamente. Un estudiante entra en el instituto y, como las tres fotocopiadoras están libres, elige una al azar.

a.1) **[1 punto]** ¿Cuál es la probabilidad de que fotocopie sin fallos?

a.2) **[1,5 puntos]** Si al fotocopiar observa que una página es defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que se haya utilizado la fotocopiadora B?

Solución: Como la fotocopiadora se elige al azar tenemos que $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$. Además, tenemos que $P(fallo \mid A) = 0{,}03$; $P(fallo \mid B) = 0{,}05$; $P(fallo \mid C) = 0{,}04$.

a.1) Se pide $P(\overline{fallo}) = 1 - P(fallo)$. Usando la regla de probabilidad total:

$$P(fallo) = P(fallo \cap A) + P(fallo \cap B) + P(fallo \cap C) =$$

$$= P(\,fallo \mid A\,)P(A) + P(\,fallo \mid B\,)P(B) + P(\,fallo \mid C\,)P(C) =$$

$$0{,}03\frac{1}{3} + 0{,}05\frac{1}{3} + 0{,}04\frac{1}{3} = \frac{1}{3}0{,}12 = 0{,}04$$

Por tanto, la probabilidad que se pide es $P(\overline{fallo}) = 1 - P(fallo) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96.$

De manera alternativa, el ejercicio se podría haber resuelto considerando

$$P(\overline{fallo}) = P(\overline{fallo} \cap A) + P(\overline{fallo} \cap B) + P(\overline{fallo} \cap C) = P(\overline{fallo} \mid A\,)P(A) + \cdots$$

Criterios de corrección:

- Plantear la probabilidad que se pide correctamente, 0,25 puntos; desarrollar la regla de la probabilidad total, 0,5 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

a.2) La probabilidad que se pide es $P(\,B \mid fallo\,)$, que se puede obtener mediante la regla de Bayes:

$$P(\,B \mid fallo\,) = \frac{P(B \cap fallo)}{P(fallo)} = \frac{P(\,fallo \mid B\,)P(B)}{P(fallo)} = \frac{0{,}05\frac{1}{3}}{0{,}04} = \frac{0{,}05}{0{,}12} = \frac{5}{12} \simeq 0{,}417$$

Criterios de corrección:

- Plantear la probabilidad que se pide correctamente, 0,5 puntos; escribir la regla de la probabilidad condicionada correctamente, 0,5 puntos; obtener el valor correcto, 0,5 puntos.

Apartado b) Una inspectora de sanidad sabe que el 5% de los restaurantes no pasará una inspección. Si elige 8 restaurantes al azar, calcula:

b.1) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que tres restaurantes no pasen la inspección.

b.2) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que todos los restaurantes pasen la inspección.

b.3) **[1 punto]** Probabilidad de que al menos dos restaurantes pasen la inspección.

		p									
n	***k***	**0.05**	**0.1**	**0.15**	**0.2**	**0.25**	**0.3**	**0.35**	**0.4**	**0.45**	**0.5**
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313
	2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
	3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
	4	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734
	5	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0313
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039

Solución: Sea X la variable aleatoria que representa el número de restaurantes que no pasará la inspección. La distribución de X es una binomial con $n = 8$ y probabilidad igual a $0{,}05$.

b.1) Se pide $P(X = 3) = 0{,}0054$ (según aparece en la tabla).

Criterios de corrección:

- Plantear la probabilidad que se pide correctamente, 0,5 puntos; obtener el valor correcto, 0,25 puntos.

b.2) SI todos los restaurantes pasan la inspección tenemos que no hay restaurantes que no la pasen, es decir, ocurre que $X = 0$. Por tanto, la probabilidad que se pide es $P(X = 0) = 0{,}6634$ (según aparece en la tabla).

Criterios de corrección:

- Plantear la probabilidad que se pide correctamente, 0,5 puntos; obtener el valor correcto, 0,25 puntos.

b.3) La probabilidad de que al menos dos restaurantes pasen la inspección es la misma de que como mucho seis no la pasen, es decir, que X sea menor o igual que 6. Por tanto, la probabilidad que se pide es

$$P(X \leq 6) = P(X = 0) + \cdots + P(X = 6) = 1 - \big(P(X = 7) + P(X = 8)\big) \simeq 1$$

Criterios de corrección:

- Plantear la probabilidad que se pide correctamente, 0,25 puntos; expresar esa probabilidad en función de las probabilidades de sucesos elementales, 0,5 puntos; obtener el valor correcto, 0,25 puntos.