

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2023/2024



Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros. También sabemos que el número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas, con $k > 0$.

- a) **[1,25 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita determinar el número de helados vendidos de cada tipo.
- b) **[1,25 puntos]** Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución única. Para los casos en los que el sistema tiene solución única, ¿es posible que en alguno de ellos se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas? Justifica tu respuesta.

2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & x < 3 \\ \frac{2x}{x-4} & x \geq 3 \end{cases}$.

- a) **[1,5 puntos]** Estudia la continuidad de la función y, en caso de existir, indica y clasifica el tipo de discontinuidades.
- b) **[1 punto]** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

3. Se quiere instalar un toldo que pase por el punto de coordenadas $A(2, 1, 1)$ y que sea perpendicular a una

barra metálica de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$.

- a) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación del plano que define el toldo.
- b) **[1,25 puntos]** Si se quiere colocar un foco en el punto de coordenadas $F(2, -2, 1)$. ¿A qué distancia se encuentra del plano que define el toldo?

4.

a) **[1 punto]** Calcula la siguiente integral: $\int \frac{2x^2}{x^2+1} dx$.

b) **[1,5 puntos]** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$. Calcula el determinante de A y de $A \cdot A$. ¿Cuál crees que será el determinante del producto de n veces A (con $n > 2$ y entero)? Justifica y razona tu respuesta.

5.

a) **[1 punto]** Calcula el volumen de la región generada al girar la función $f(x) = x$ entre los puntos $x = 2$ y $x = 3$ con respecto al eje X.

b) **[1,5 puntos]** Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

$$\pi_1 \equiv x + y = 1; \pi_2 \equiv x + y + z = 2; \pi_3 \equiv z = 0.$$

6.

a) [1 punto] Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 + 2x}$.

b) En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están marcadas con los dos puntos (verde y rojo).

b.1) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?

b.2) [0,75 puntos] Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?

En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo.

7.

a) [1,25 puntos] Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Calcula razonadamente el valor del siguiente

determinante: $\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

b) [1,25 puntos] Obtén la ecuación de la recta que es paralela a la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ y contiene al punto $A(0, 1, 0)$.

8.

a) Se tienen tres cajas A, B y C. En la caja A hay dos cartas de espadas y tres de copas. En la caja B, tres cartas de espadas y dos de copas y en la caja C, cuatro de espadas y una de copas. Se tira un dado de seis caras y, si el resultado es impar, se saca una carta de la caja A; si el resultado es 4 o 6, se saca una carta de la caja B y, si el resultado es 2, se saca una carta de la caja C.

a.1) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de copas.

a.2) [0,75 puntos] Sabiendo que la carta extraída es de copas, ¿cuál es la probabilidad que se haya extraído de la caja B?

b) La probabilidad de que un paracaidista novato caiga en el punto correcto es de 0,25. Si se lanza 5 veces, determina:

b.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto exactamente dos veces?

b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto al menos una vez?

n	k	p								
		0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
5	0	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1563
	2	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
	3	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
	4	0.0005	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1563
	5	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0313